

Promedio y desviación estándar de mediciones

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

valor promedio obtenido al medir $\hat{A}$ en muchos sistemas en estado $|\psi\rangle$.

$$\Delta A^2 = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$$

El conmutador $[X, P]$

$$\langle \phi | [\hat{X}, \hat{P}] | \psi \rangle = \langle \phi | [\hat{X}, \hat{P}] | \psi \rangle$$

$\uparrow$

$$11 = \int dx |x\rangle\langle x|$$

$$= \int \phi^*(x) \langle x | \hat{X} \hat{P} - \hat{P} \hat{X} | \psi \rangle = \int \phi^*(x) \left[x \langle x | P | \psi \rangle - i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \right]$$

$$= \int \phi^*(x) \left[-i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) + i\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) + i\hbar \psi(x) \right]$$

$$= \int i\hbar \phi^*(x) \psi(x) = i\hbar \langle \phi | \psi \rangle$$

Como se vale $\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \Rightarrow [\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$

Reglas de conmutación para $\vec{R}$ y $\vec{P}$.

$$[R_i, R_j] = 0 \quad [P_i, P_j] = 0, \quad [R_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

Veremos que esto significa

que no los podemos medir

simultáneamente

6. Implicaciones físicas de la Ec. de Schrödinger

(CT III.D.1)

6.1. Evolución determinista

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

- De primer orden en t . Dado un estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ el estado a cualquier tiempo subsecuente $|\psi(t)\rangle$ está determinado.
- No hay indeterminación en la evolución del estado cuántico.
- La indeterminación aparece sólo hasta que se hace una medición.
- Entre mediciones el estado evoluciona de manera determinista.

La condición inicial es un $|\psi(t_0)\rangle$
 $\psi_0(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \psi(t_0) \rangle$ $\psi_0(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi(t_0) \rangle$
 $\therefore |\psi_0(t)\rangle$ determina $\psi_0(\vec{p})$ y $\psi_0(\vec{r})$ y estas
 están relacionadas a través de una
 T.T. a diferencia del caso clásico.

III D

Consecuencias de la Ec. de Schrödinger

6.2. Principio de superposición

- La ecuación de Schrödinger es lineal y homogénea.
- i.e. se puede escribir como

$$\left[i\hbar \frac{d}{dt} - H(t) \right] |\psi(t)\rangle = 0$$

- Se sigue entonces que si tenemos dos soluciones $|\psi_1(t)\rangle$ y $|\psi_2(t)\rangle$ y el estado inicial del sistema es $|\psi(t_0)\rangle = \lambda_1 |\psi_1(t_0)\rangle + \lambda_2 |\psi_2(t_0)\rangle$, al tiempo t este habrá evolucionado a $|\psi(t)\rangle = \lambda_1 |\psi_1(t)\rangle + \lambda_2 |\psi_2(t)\rangle$
- Por tanto podremos hablar de un operador lineal de evolución temporal $U(t, t_0)$ que cumple

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

- Podemos empezar a ver que $U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$.

6.3. Conservación de probabilidad

Conservación de norma

- $\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \left[\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \right] |\psi(t)\rangle + \langle \psi(t) | \left[\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right]$
- Usando $\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle$ y $\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | = -\frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | H^\dagger(t)$
- Obtenemos $\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = -\frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle = 0$
- Esta propiedad es indispensable para interpretar $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ como la densidad de probabilidad de posición.

Evolución de los valores promedios de un observable

- Para un estado normalizado $|\psi(t)\rangle$ la evolución del valor esperado de un operador A está dada por

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \quad (3)$$

- En este caso vemos que $\langle A \rangle(t)$ depende de t debido a la dependencia de $|\psi(t)\rangle$ que evoluciona de acuerdo a la Ec de Schrödinger.
- En un caso más general A podría depender explícitamente del tiempo causando una variación adicional de $\langle A \rangle(t)$ respecto a t .
- Vamos a estudiar la evolución $\langle A \rangle(t)$ y su relación con mecánica clásica.
- Derivando la Ec. 3 respecto a t

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \left[\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \right] A(t) | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | A(t) \left[\frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle \right] + \langle \psi(t) | \frac{\partial A(t)}{\partial t} | \psi(t) \rangle$$

- Usando la Ec de Schrödinger para $\frac{d}{dt} \langle \psi(t) |$ y $\frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle$

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | A(t)H(t) - H(t)A(t) | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \frac{\partial A(t)}{\partial t} | \psi(t) \rangle$$

- Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H(t)] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \quad (4)$$

- Entendamos cómo aparece la dependencia de $\langle A \rangle$ respecto a t
- Consideremos una cantidad clásica $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. En mecánica clásica $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ dependen de t y de esta forma $\mathcal{A}$ depende de t explícitamente e implícitamente a través de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$.
- A la cantidad clásica $\mathcal{A}$ le corresponde un operador $A = \mathcal{A}(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t)$.
- La dependencia del tiempo de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ ya no aparece en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{P}$ sino en el vector de estado $|\psi(t)\rangle$.
- En la representación $|\mathbf{r}\rangle$ el valor medio de A es

$$\langle A \rangle = \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}, t) \mathcal{A}(\mathbf{r}, -i\hbar \nabla, t) \psi(\mathbf{r}, t)$$

al integrar respecto a $\mathbf{r}$ queda un número que sólo depende de t .

Los observables $\mathbf{R}$ y $\mathbf{P}$ (Teorema de Ehrenfest)

- Aplicaremos la ecuación 4 a los observables $\mathbf{R}$ y $\mathbf{P}$ para una partícula en un potencial escalar

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(\mathbf{R})$$

- Estos operadores no depende explícitamente del tiempo por lo que $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = 0$ y $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = 0$
- entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{R} \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [\mathbf{R}, H] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[\mathbf{R}, \frac{P^2}{2m} \right] \right\rangle \\ \frac{d}{dt} \langle \mathbf{P} \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [\mathbf{P}, H] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\mathbf{P}, V(\mathbf{R})] \rangle \end{aligned}$$

- Calcular $\left[\mathbf{R}, \frac{P^2}{2m} \right] = \frac{i\hbar}{m} \mathbf{P}$ usando $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ y las relaciones canónicas de conmutación $[R_i, P_j] = i\hbar \delta_{ji}$
- de Tarea $[\mathbf{P}, V(\mathbf{R})] = -i\hbar \nabla V(\mathbf{R})$
- Por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{R} \rangle &= \frac{1}{m} \langle \mathbf{P} \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle \mathbf{P} \rangle &= -\langle \nabla V(\mathbf{R}) \rangle \end{aligned}$$